

לוגיקה (1) – פתרונות תרגיל 7

1.

- א. ברור שאם גרף G הוא צביע (כלומר, יש לו צביעה חוקית) אז כל תת גרף של G הוא צביע (קחו צביעה חוקית של G , והסתכלו על הצביעה המושרית על כל תת גרף).
- ב. בהינתן גרף $G = (V, E)$ נגדיר שפה: $L = \{P_{u,v} : u, v \in V\} \cup \{P_{u,i} : n \in V, 1 \leq i \leq n\}$.
נגדיר את קבוצות הפסוקים הבאות:
- (i) $\Gamma_1 = \{Xor_{i=1}^n(p_{u,i}) : u \in V, 1 \leq i \leq n\}$ כאשר הסימון $Xor_{i=1}^n(P_i)$ הוא קיצור לפסוק "בדיוק אחד מבין ה- P_i -ים מקבל ערך T ".
- (ii) $\Gamma_2 = \{p_{u,i} \rightarrow \neg p_{v,i} : (u, v) \in E, 1 \leq i \leq n\}$
- ראיתם בתרגיל 6, שאלה 4, של- $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ יש מודל אם G צביע.
- ג. ממשפט הקומפקטיות אנחנו יודעים של- Γ יש מודל אם לכל תת קבוצה סופית של יש מודל. תהי, אם כן, $\Gamma_0 \subset \Gamma$ סופית. עלינו להראות שאם כל תת גרף של G הוא צביע אז ל- Γ_0 יש מודל. נשים לב שמותר לנו להוסיף ל- Γ_0 פסוקים מתוך Γ , כיוון שע"י כך אנחנו רק מקשים על עצמנו. לכן נסמן ב- $\{P_{u,i} \in \Gamma_0 : \text{לאיזה } i : v \in V\}$ (כלומר, V_0 היא קבוצת כל הקדקודים הנוכחים ב- Γ_0). נגדיר $E_0 = \{(u, v) \in E : u, v \in V_0\}$ (כלומר, E_0 הוא אוסף כל הצלעות ב- G בין קדקודים מתוך V_0). ונשים לב ש- $G_0 = (V_0, E_0)$ הוא תת גרף של G .
כעת נגדיר:

$$\Gamma_1^0 = \{Xor_{i=1}^n(p_{u,i}) : u \in V_0, 1 \leq i \leq n\} \quad \bullet$$

$$\Gamma_2^0 = \{p_{u,i} \rightarrow \neg p_{v,i} : (u, v) \in E_0, 1 \leq i \leq n\} \quad \bullet$$

- אזי ברור ש- $\Gamma_1^0 \cup \Gamma_2^0 = \Gamma_0' \subseteq \Gamma_0$ ומהגדרת V_0 ברור ש- $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_0'$, לכן יספיק להראות של- Γ_0' יש מודל, אבל לפי תרגיל 6, שאלה 4, ל- Γ_0' יש מודל אם ל- $G_0 = (V_0, E_0)$ יש צביעה חוקית, וזה בדיוק הנתון.

2.

- א. טריביאלי.
- ב. מההגדרה נובע ש- $A \in U_{B,\varepsilon}$ אם $d(A, B) < \varepsilon$ אם $\sup\{1/n : A(P_n) \neq B(P_n)\} < \varepsilon$ אם n לכל $1/n \geq \varepsilon$ מתקיים $A(P_n) = B(P_n)$. לכן הפסוק הדרוש הוא $\varphi_U = \bigwedge_{1/n \geq \varepsilon} P_n^{(B(P_n))}$ כאשר $P_n^{(T)} = P_n$ ו- $P_n^{(F)} = \neg P_n$ אחרת.
- ג. אם $\bigcup_{i=1}^\infty U_i$ כיסוי של S אזי $\bigcap_{i=1}^\infty Models(\varphi_{U_i}) = S \setminus \bigcup_{i=1}^\infty U_i = \emptyset$ כלומר, $\phi = S \setminus \bigcup_{i=1}^\infty U_i = \bigcup_{i=1}^\infty S \setminus U_i = \bigcap_{i=1}^\infty Models(\varphi_{U_i})$ עקבית, כלומר $\phi = S \setminus \bigcup_{i=1}^\infty U_i = \bigcup_{i=1}^\infty S \setminus U_i = \bigcap_{i=1}^\infty Models(\varphi_{U_i})$ כנדרש.
- ד. הטענה נובעת ישירות מסעיף ב': מהנתון $S \setminus D = \bigcup_i U_i$ כאשר U_i סביבות. לכן $D = \bigcap_{i \in I} S \setminus U_i = \bigcap_{i \in I} Models(\varphi_i) = Models\{\varphi_i\}_{i \in I}$ כנדרש.

3.

- א. נניח ש- $A \models \varphi \vee \psi$ אז לפי הגדרת האמת או ש- $A \models \varphi$, ואז מכיוון ש- $\varphi \models \chi$ נובע ש- $A \models \chi$ או ש- $A \models \psi$ ואז מהחלק השני בנתון ($\psi \models \chi$) נובע ש- $A \models \chi$. בסיכום של דבר: אם $A \models \varphi \vee \psi$ אז $A \models \chi$, ולכן $\varphi \vee \psi \models \chi$, והטענה נכונה.
- ב. הטענה אינה נכונה: קחו $\varphi = p$, $\psi = q$ ו- $\chi = \neg q$.
- ג. נניח ש- $A \models \varphi$ אזי מהנתון $A \models \chi \wedge \psi$. לפי הגדרת האמת זה שקול לכך ש- $A \models \chi$ ו- $A \models \psi$. בסיכום, $A \models \varphi$ אז $A \models \psi$, ולכן $\varphi \models \psi$, ובנוסף $A \models \chi$ ולכן גם $\varphi \models \chi$. לכן הטענה נכונה.
- ד. יתכן רק אם φ סתירה.
- ה. נכון, כי $\varphi \models \chi$ אם $Models(\neg\varphi) \subseteq Models(\neg\chi)$ $\Leftrightarrow Models(\varphi) \supseteq Models(\chi)$, כנדרש.
- ו. התנאי יתכן אם χ היא טאוטולוגיה, ולכן גם $\psi \models \chi$, ולכן הטענה נכונה.

4.

- א. באינדוקציה על אורך המחרוזת: לקבועים או למשתנים אישיים אין רישא ממש שאינה ריקה, ולכן הטענה נכונה. נניח את הטענה לכל מחרוזת מאורך קטן מ- n ונוכיח עבור מחרוזת α מאורך n : נשים לב שבאינדוקציה טריביאלית מראים שאם האורך של ש"ע גדול מ-1, אזי התו הראשון במחרוזת הוא סימן פעולה בשפה. לכן המחרוזת הנתונה לנו מתחילה בסימן פעולה m -מקומי H . לפי ההגדרה H אינה ש"ע (כי האורך של כל ש"ע שאינו קבוע או משתנה אישי גדול ממש מ-1). לכן בהינתן רישא ממש χ , לפי ההגדרה חייב להתקיים ש- $\beta = Ht_1, \dots, t_k$, $\chi = Ht_1, \dots, t_k, \beta$ כאשר β היא רישא ממש של t_{k+1} . אבל לפי ההגדרה χ היא ש"ע אם יש שמות עצם $t'_1, \dots, t'_m$ כך ש- $\beta = Ht'_1, \dots, t'_m$. לפי הנחת האינדוקציה לא יתכן ש- t'_1 הוא רישא ממש של t_1 . לכן יש $1 \leq i \leq k$ מזערי כך ש- t'_i מכיל ממש (כמחרוזת) את t_i (שאם לא כן $t_i = t'_i$ לכל $1 \leq i \leq k$, ומכיוון ש- $k < m$ נגיע לסתירה). אבל זה כמובן לא יתכן כי האורך של t'_i קטן ממש מ- n ו- t_i רישא ממש שלו שהיא ש"ע – בסתירה להנחת האינדוקציה.
- ב. ההוכחה זהה במילה למשפט הקריאה היחידה לפסוקים בתחשיב הפסוקים.